

25 畢氏數與費馬方程式

25.1 畢氏數

若正整數 a, b, c 互質且 a, b, c 剛好構成一個直角三角形的三邊邊長，即 $c^2 = a^2 + b^2$ ，則稱 (a, b, c) 是一組『畢氏數』。也就是說，邊長是正整數且互質之直角三角形的三邊邊長恰是一組畢氏數。有關畢氏數最有名的結果莫過於克羅內克在 1901 年證明的底下這個定理：

定理 25.1(克羅內克定理) 方程式 $x^2 + y^2 = z^2$ 的互質正整數解(即 $(x, y, z) = 1$ 的正整數解 x, y, z) 或者說任何的畢氏數 (x, y, z) 均可表為

$$\begin{cases} x = m^2 - n^2, \\ y = 2mn, \\ z = m^2 + n^2, \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} x = 2mn, \\ y = m^2 - n^2, \\ z = m^2 + n^2, \end{cases}$$

其中 m, n 為互質的正整數且一為奇數，一為偶數；而且 x 與 y 至少有一個為 3 的倍數， x 與 y 至少有一個為 4 的倍數， x, y 與 z 至少有一個為 5 的倍數。

【證明】 首先令 x, y, z 是方程式 $x^2 + y^2 = z^2$ 的一組互質正整數解，由此方程式可以推得 x, y, z 其實是兩兩互質的。若 x, y 都是偶數，則 z 必為偶數，這與假設不符。如果 x, y 都是奇數，則 z 為偶數，此與 $z^2 = x^2 + y^2 \equiv 2 \pmod{4}$ 矛盾。所以 x, y 必須一個為奇數，一個為偶數。為了方便，不妨設 y 為偶數， x, z 為奇數（注意： x, y, z 兩兩互質）。

首先證明： $(z-x, z+x) = 2$ ：

令 $(z-x, z+x) = d$ 則

$$d \mid z-x, d \mid z+x \Rightarrow d \mid 2x, d \mid 2z \Rightarrow d \mid 2 \Rightarrow d = 1 \text{ 或 } 2.$$

因為 $z-x, z+x$ 都是偶數，所以 $d = 2$ 。現在由

$$y^2 = (z+x)(z-x), \text{ 其中 } (z+x, z-x) = 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} z+x = 2m^2, \\ z-x = 2n^2, \text{ 其中 } m, n \text{ 互質} \\ y = 2mn, \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = m^2 - n^2, \\ y = 2mn, \text{ 其中 } m, n \text{ 互質且一奇, 一偶.} \\ z = m^2 + n^2, \end{cases}$$

至於剩下的部份由第 24 節的例題 24.4 馬上得證。

例題 25.1 證明方程式

$$x^4 - 4y^4 = z \quad (25.1)$$

無正整數解 x, y, z 。

【證明】設 x, y, z 是此方程式的一組正整數解。若有一個質數 p 同時整除 x 與 y ，則由(25.1) 得到： p^2 整除 z 。此時可推得 $(\frac{x}{p}, \frac{y}{p}, \frac{z}{p^2})$ 亦為(25.1)的一組正整數解。因此，我們不妨假設 x 與 y 互質，容易推得此時的 x, y, z 是兩兩互質的；甚至由

$$(2y^2)^2 + z^2 = x^2 \quad (25.2)$$

可進一步得到： $2y^2, z, x^2$ 是兩兩互質的。由(25.2)及定理 25.1 可得

$$\begin{cases} 2y^2 = 2mn, \\ z = m^2 - n^2, \text{ } m, n \text{ 互質且一奇一偶.} \\ x^2 = m^2 + n^2, \end{cases} \quad (25.3)$$

因為 m, n 互質且 $y^2 = mn$ ，所以必有 $m = a^2, n = b^2$ 。代入(25.3)得到：正整數 a, b, x 滿足

$$a^4 + b^4 = x^2 \quad (25.4)$$

在下一節的定理中，我們將證明方程式 $x^4 + y^4 = z^2$ 無正整數解 x, y, z 。因此 (25.4) 是不可能的，所以本例題無正整數解。

25.2 費馬方程式與費馬無窮遞降法

定理 25.2 證明方程式 $x^4 + y^4 = z^2$ 無正整數解 x, y, z 。

【證明】假設 x, y, z 為 $x^4 + y^4 = z^2$ 的正整數解中 z 值最小的一組解，則有 $(x, y, z) = 1$ （自行檢驗）；同前定理的證明，不妨假設 y 為偶數， x, z 為奇數，則利用前定理得到

$$\begin{cases} x^2 = m^2 - n^2, \\ y^2 = 2mn, \\ z = m^2 + n^2, \end{cases} \quad \text{其中正整數 } m, n \text{ 互質且一奇，一偶}$$

$\Rightarrow n$ 偶數， m 奇數（由 $x^2 + n^2 = m^2$ 得到）

$$\Rightarrow \begin{cases} x = c^2 - d^2, \\ n = 2cd, \\ m = c^2 + d^2, \end{cases} \quad \text{其中正整數 } c, d \text{ 互質且一奇，一偶}$$

$\Rightarrow y^2 = 4cd(c^2 + d^2)$

$\Rightarrow c = e^2, d = f^2, c^2 + d^2 = g^2$ （因為 $c, d, c^2 + d^2$ 兩兩互質）

$\Rightarrow e^4 + f^4 = g^2$ 其中 e, f, g 為正整數。

因為 $g \leq g^2 = c^2 + d^2 = m < z$ ，所以我們找到另一組正整數解 (e, f, g) ，其中 $g < z$ ，得到矛盾。

這樣的證明方法稱為費馬無窮遞降法，是費馬首創的方法。

定理 25.3 費馬方程式 $x^n + y^n = z^n$ 無正整數解 x, y, z 。

【解】因為 $x^4 + y^4 = (z^2)^2$ ，**定理 25.2** 知道 $x^4 + y^4 = z^4$ 無正整數解 x, y, z 。

費馬方程式是泛指像“ $x^n + y^n = z^n$ ”這樣的方程式。當 $n = 3, 4$ 時，費馬是第一位證明此方程式無正整數解的數學家；當 $n = 5$ 時，勒讓德於 1823 年證明此方程式無正整數解；當 $n = 7$ 時，狄利克雷於 1832 年證明此方程式無正整數解。事實上，當 $n \geq 3$ 時，費馬方程式皆無正整數解，這就是有名的費馬最後定理。這個定理在 1994 年時，被英國數學家威爾斯證明成立。

25.3 另一則方程式

定理 25.4 考慮方程式 $x^4 - 9y^4 = z^2$ 。

(1) 若 x, y, z 為此方程式的一組正整數解，則證明： $2 \mid y$ 。

(2) 證明：方程式 $x^4 - 9y^4 = z^2$ 無正整數解 x, y, z 。

【解】

(1) 為了方便起見，不妨假設 x, y, z 是方程式 $(x^2)^2 = (3y^2)^2 + z^2$ 的一組互質正整數解且 y 為奇數則

$$\begin{aligned} (x^2)^2 &= (3y^2)^2 + z^2 \\ \Rightarrow \begin{cases} x^2 = m^2 + n^2, \\ 3y^2 = m^2 - n^2, \\ z = 2mn, \end{cases} & \text{其中正整數 } m, n \text{ 互質} \\ \Rightarrow \begin{cases} 3 \mid m \text{ 或 } 3 \mid n \text{ (由 } x^2 = m^2 + n^2 \text{ 得到),} \\ 3y^2 = m^2 - n^2, \end{cases} \\ \Rightarrow 3 \mid m \text{ 且 } 3 \mid n, & \text{這與 } m, n \text{ 互質矛盾。} \end{aligned}$$

因此 y 必須是偶數。

(2) 設方程式 $x^4 - 9y^4 = z^2$ 的正整數解中， x 值最小的一組是 x, y, z ；因為 x 值最小，所以 x, y, z 必是互質的正整數解。現在考慮 $(x^2)^2 = (3y^2)^2 + z^2$ 。因為 $(x, y, z) = 1$ ，所以容易推得 $(x^2, 3y^2, z) = 1, 3$ 。當 $(x^2, 3y^2, z) = 3$ 時，我們有 $3 \mid x, 3 \mid z$ ，但是 $3 \nmid y$ （這是因為 x, y, z 互質）。將式子 $(\frac{x^2}{3})^2 = (y^2)^2 + (\frac{z}{3})^2$ 模 3 得到 $0 \equiv 1 + (\frac{z}{3})^2 \pmod{3}$ ，這與 $(\text{整數})^2 \equiv 0, 1 \pmod{3}$ 矛盾。若 $(x^2, 3y^2, z) = 1$ ，則由(1)及定理 25.1 可令

$$\begin{cases} x^2 = m^2 + n^2, \\ 3y^2 = 2mn, \quad \text{其中正整數 } m, n \text{ 互質} \\ z = m^2 - n^2, \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m = c^2 - d^2, \\ n = 2cd, \end{cases} \quad \text{其中正整數 } c, d \text{ 互質且一奇，一偶}$$

$$\Rightarrow 3\left(\frac{y}{2}\right)^2 = cd(c^2 - d^2), \quad \text{其中正整數 } c, d, c^2 - d^2 \text{ 兩兩互質。}$$

因為 $c, d, c^2 - d^2$ 為兩兩互質的正整數且 c, d 為一奇數、一偶數及

$$3\left(\frac{y}{2}\right)^2 = cd(c^2 - d^2).$$

現在分三種情形如下：

(a) 若 $3 \mid c$ ，則

$$\begin{aligned} c^2 - d^2 = e^2 &\Rightarrow c^2 = d^2 + e^2 \\ &\Rightarrow 3 \mid d \text{ 或 } 3 \mid e \\ &\Rightarrow 3 \mid d \text{ (因為 } 3 \mid c \text{)。} \end{aligned}$$

此與 c, d 互質矛盾。

(b) 若 $3 \mid d$ ，則

$$\begin{cases} c = e^2, \\ d = 3f^2, \quad \text{其中 } e, f, g \text{ 為正整數且 } e < c < n < x \\ c^2 - d^2 = g^2, \end{cases}$$

$$\Rightarrow e^4 - 9f^4 = g^2.$$

這與 x 是最小的假設矛盾。

(c) 若 $3 \mid c^2 - d^2$ ，但 3 不整除 c 與 d ，則

$$\begin{cases} c = e^2, \\ d = f^2, \end{cases} \quad \text{其中 } e, f \text{ 一奇，一偶且不是 } 3 \text{ 的倍數}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (e^2 - f^2)(e^2 + f^2) = c^2 - d^2 = 3g^2, \\ 1 \equiv e^2 \equiv f^2 \pmod{3}. \end{cases}$$

由 c, d 一奇、一偶且互質推得 $(e^2 - f^2, e^2 + f^2) = 1$ ；再利用 $3 \mid e^2 - f^2$ 得到

$$e^2 + f^2 = h^2 \Rightarrow e, f \text{ 至少有一個為 } 3 \text{ 的倍數.}$$

這與 e, f 不是 3 的倍數矛盾。

綜合 (a)、(b)、(c) 得知：方程式 $x^4 - 9y^4 = z^2$ 無正整數解。

25.4 費馬無窮遞降法的另一個應用

定理 25.5 利用費馬無窮遞降法證明： $\sqrt{2}$ 不是有理數。

【證明】 設 $\sqrt{2}$ 是有理數，且將它表為

$$\sqrt{2} = \frac{q}{p}$$

的形式，其中 $p, q (p < q < 2p)$ 為正整數，且 $\frac{q}{p}$ 是上述表示法中 p 值最小的一組。由

$$\begin{aligned}\sqrt{2} = \frac{q}{p} &\Rightarrow 2p^2 = q^2 \\ &\Rightarrow 2(q-p)^2 = (q+2p)^2 \\ &\Rightarrow \sqrt{2} = \frac{|q-2p|}{q-p}\end{aligned}$$

及分母 $(q-p) < p$ 知道：這與 $\frac{q}{p}$ 是上述表示法中 p 值最小的一組矛盾。因此， $\sqrt{2}$ 不是有理數。

習題 25.1 證明：邊長是正整數之直角三角形的內切圓半徑亦為正整數。

習題 25.2 試求 $x^4 + 1 = z^2$ 的整數解 x, z 。

習題 25.3 證明方程式 $x^4 - y^4 = z^2$ 無正整數解 x, y, z 。

習題 25.4 證明方程式 $x^4 - y^4 = 2z^2$ 無正整數解 x, y, z 。

習題 25.5 證明方程式 $x^4 + 4y^4 = z^2$ 無正整數解 x, y, z 。

習題 25.6 證明：三邊皆為正整數的直角三角形的面積不可能是一個完全平方數。

習題 25.7 設 p 為質數，利用費馬無窮遞降法證明： \sqrt{p} 不是有理數。

動手玩數學

希望之島西邊的居民都專說謊話，東邊的居民則有專說謊話的，也有專說實話的。一天一位數學家到這小島來觀光，一下飛機就有甲、乙、丙三位島上的居民爭著充當這位數學家的導遊。數學家分別叫甲去問乙、乙去問丙、丙去問甲住在島的哪一邊。結果回報是這樣的：

甲告訴數學家“乙說他住在島的東邊”

乙告訴數學家“丙說他住在島的西邊”

丙告訴數學家“甲說他住在島的東邊”

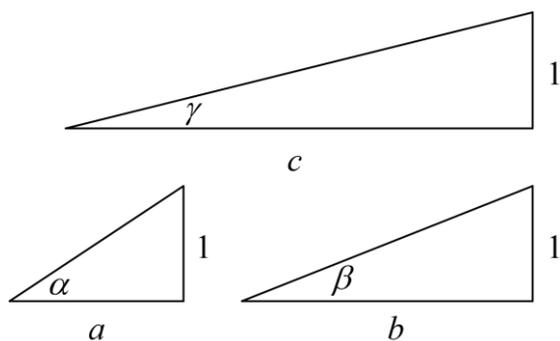
數學家猶豫一下之後，又叫丙去問乙住在島的哪一邊，回報是這樣的：

丙告訴數學家“乙說他住在島的西邊”

你能知道甲、乙、丙分別住在島的哪一邊，是老實人或者是說謊者嗎？

挑戰題

設正整數 a, b, c 是底下三個直角三角形的底邊之邊長。



如果

$$\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{4},$$

試求正整數 a, b, c 的值。

挑戰題

試求滿足

$$|3^m - 2^n| = 1$$

的正整數 m 與 n 。

杰斯馬維奇猜想

杰斯馬維奇在 1956 年時，提出如下的猜想：如果正整數 a, b, c 滿足 $a^2 + b^2 = c^2$ ，則方程式

$$a^x + b^y = c^z$$

的正整數解僅有 $x = y = z = 2$ 一組而已。中國數學家柯召在這方面有不錯的貢獻（大多發表在四川大學學報自然科學版）。例如在

$$\begin{cases} a = 2n + 1, \\ b = 2n(n + 1), \\ c = 2n(n + 1) + 1, \end{cases} \quad \text{其中 } n \equiv 1, 4, 5, 9, 10 \pmod{12}$$

時，杰斯馬維奇猜想是對的。

我國的數學奧林匹亞選訓營曾經考過如下的題目：若 $\frac{5^n}{3^n + 4^n}$ 是整數，則 $n = 2$ 。有興趣的讀者，可以嘗試看看。